計量・数理社会学のための数学

論理から大数の法則まで

毛塚和宏
（東京工業大学）

今日のメニュー

- なぜ数学を学ぶ必要があるのか
- 論理と命題
- 集合
- ∀と∃
- 収束するとは
- 大数の法則を示す
- 数学を学ぶためには

なぜ数学を学ぶ必要があるのか

- 統計学は数学で書かれている
  - 微積分・線形代数・確率論の集合体
- 数理・統計モデルを理解するために
- 他分野の議論を理解するために
  - Ex) 経済学にはよく数式が登場する

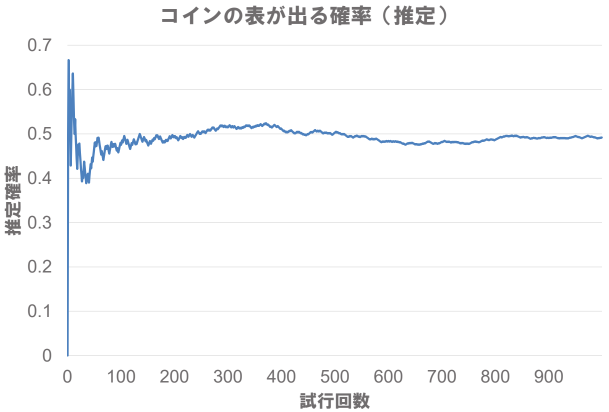
今日の目的

定理（大数の弱法則）

確率変数$X_1, X_2, \ldots$が独立同分布で，
$E(X_i) = \mu, \quad V(X_i) = \sigma^2 < +\infty$を満たす．
このとき，次が成立する．

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \to \infty} \Pr(|\overline{X_n} - \mu| < \varepsilon) = 1.$$

今日の目的：大数の法則



論理と命題

命題とは

真か偽か，明確にできる文章

- ex) 「2+5=8」
  - 真(正しい)か偽(間違っている)か明確にできる
  - これは命題であり，偽である．
- ex) 「人には心がある」
  - 人？　心？　真偽不明なので命題ではない．
- 命題の仲間：定理，補題，系

命題のあれこれ

複数の命題が絡むことがある

- ∨：または（論理和）
  - $P \vee Q$：P, Qいずれかが真であれば真になる
- ∧：かつ（論理積）
  - $P \wedge Q$：P, Qいずれも真であれば真になる
- ¬：～ではない（否定）
  - $\neg P$：Pが偽であれば$\neg P$は真になる
- ⇒：ならば
  - $P \Rightarrow Q$：Pが真でQが偽である時のみ偽になる
  - 日常語の「ならば」との違いに注意

真理表

2つの命題の真偽によって他の命題の真偽がどのようになるか

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

T(真, True)とF(偽, False)

飲酒運転とならば

- お酒を飲んだ ならば 運転してはいけない
  - どの状況で真か？
  - 日常語に寄せるなら法律を守っているのは？

お酒は……	運転は……	問題は……
飲んだ	していない	
飲んだ	している	
飲んでいない	していない	
飲んでいない	している	

述語論理

変数を伴う命題

- ex) 「私は20歳だ」
  - 「私」は誰？
    - 変数を使って一般化する
- ex) $P(x)$ ：「xは20歳だ」
  - P(毛塚和宏)は偽
    - xが変数，なんでも代入できる……？
  - 変数の範囲は集合によって与えられる

集合とは

「ものの集まり」を集合とよぶことにする

$$A = \{a, b, c\}$$

- $a \in A$：要素aは集合Aに属している
- 有名な集合 $\mathbb{N}$：自然数，$\mathbb{Z}$：整数，$\mathbb{R}$：実数

- 外延的定義(記述)
  - すべてを具体的に記述する方法
  - $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- 内包的定義(記述)
  - 集合に含まれる条件を記述する方法
  - $A = \{n | n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 4\}$

論理で与える！

集合のあれこれ

複数の集合が絡むことがある

- $\cup$：または
  - $A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$
- $\cap$：かつ
  - $A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$
- A^c：補集合 (complement)
  - $A^c = \{x \mid x \notin A\} = \{x \mid \neg(x \in A)\}$

論理と集合の関係

- 全体集合$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- 条件$P(n), Q(n)$
  - $P(n)$：nは2の倍数である．
  - $Q(n)$：nは3の倍数である．
- 次の集合を外延的に記述してください．
  - $A = \{n \mid n \in U, P(n)\}$
  - $B = \{n \mid n \in U, Q(n)\}$
- 次の集合を内包的・外延的に記述してください．
  - $A^c \cup B$
  - $A \cap B^c$

∀と∃

∀と∃：任意と存在

- ∀：すべての/任意の～
  - For all ～
  - 例) $\forall n \in \mathbb{N}, n > 3.$
  - 読み方：すべての/任意の自然数nについて，$n \geq 3$である．
- ∃：ある〇〇が存在して～
  - There exists 〇〇 such that ～
  - 例) $\exists n \in \mathbb{N}, n > 3.$
    - 方言： $\exists n \in \mathbb{N}\ s.t.\ n > 3.$
  - 読み方：ある自然数nが存在して，$n \geq 3$を満たす．
    - もっと自然な翻訳：$n \geq 3$を満たす自然数nが存在する．

∀と∃：否定の仕方

- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0.$
  - すべての実数xは，$x^2 \geq 0$である．
- $\neg(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0.$
  - 否定すると……
  - $x^2 < 0$となる実数xが存在する．
- 任意を否定すると存在に，存在を否定すると任意になる．
  - ここでの「否定する」は単に「～でない」とすること
  - 「証明する/反証する」とは別

∀と∃：証明の仕方

示すこと	$\forall x \in X, P(x).$	$\exists x \in X, P(x).$
真である	証明する	例を示す 証明する rf. 構成的証明/背理法による証明
偽である	反例を示す rf. 悪魔の証明	証明する

∀と∃：証明の仕方

- **命題**：$\forall n \in \mathbb{N}, n > 3.$**は偽である．**
  - **証明**： 2**は**$2 \in \mathbb{N}$**だが，**$2 \leq 3$**である．**
    - **反例が存在することを示す**
- **命題**：$\exists n \in \mathbb{N}, n > 3.$
  - **証明**：$4 \in \mathbb{N}$**は**$4 > 3$**である．**
    - 1**つ存在することを示せばよい．**

∀と∃：証明の仕方

- **命題**：$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0.$
  - **証明**：
- **命題**：$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -1.$**は偽である．**
  - **証明**：

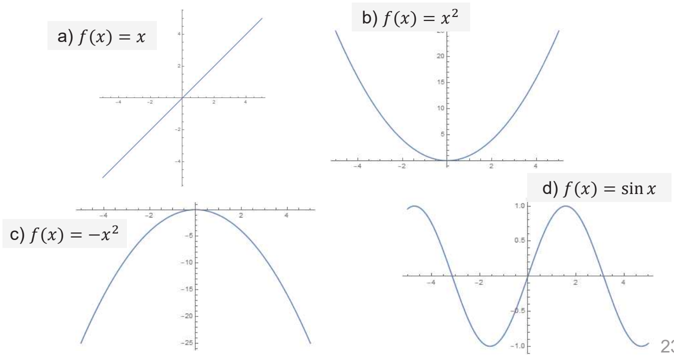
∀と∃の順番

∀と∃の順番

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y \geq f(x).$
- 2) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y \geq f(x).$
- **この**2**つの命題の違いは？**
  - xy**平面に，それぞれの命題を満たす関数**f**の グラフは？**

∀と∃の順番

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y \geq f(x).$
- 2) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y \geq f(x).$



∀と∃の順番

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y \geq f(x).$
  - **すべての**x**に対して，ある**y**が存在して，** $y \leq f(x)$**を満たす．**
  - **この場合，**y**は**x**に応じて変化する**
  - $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y(x) \in \mathbb{R}, y \geq f(x).$
  - **例**：$f(x) = x$
  - **例**：$f(x) = -x^2$
    - cf. **一様性**

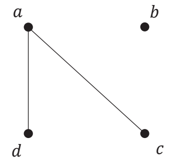
∀と∃の順番

- 2) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y \geq f(x)$.
  - あるyが存在して，すべてのxに対して，$y \leq f(x)$を満たす．
  - yはxの取り方に依らない．
    - すべてのxに共通するyが存在して……
  - 例：$f(x) = x$
  - 例：$f(x) = \sin x$

練習

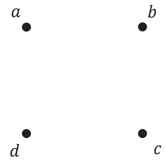
- a, b, c, dの4人からなる集団を考える
  - 集合$A = \{a, b, c, d\}$と表しておく．
- $P(x, y)$：xとyは友人である．
  - 自分自身については考えない（$P(x, x)$は考えない）
- 人をノード(点)，友人関係をエッジ(辺)で表現する無向グラフを考える．

$a-d, a-c$が友人→

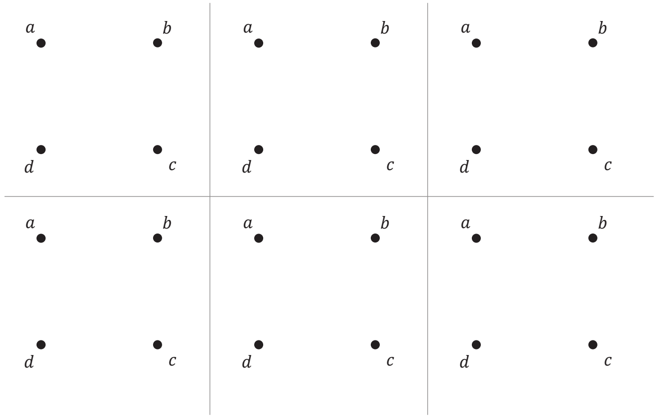


練習

- 次の1)〜4)を満たす友人関係を無向グラフで表現してください．
- 1) $\forall x \in A, \forall y \in A, P(x, y)$.
- 2) $\forall x \in A, \exists y \in A, P(x, y)$.
- 3) $\exists x \in A, \forall y \in A, P(x, y)$.
- 4) $\exists x \in A, \exists y \in A, P(x, y)$.



練習



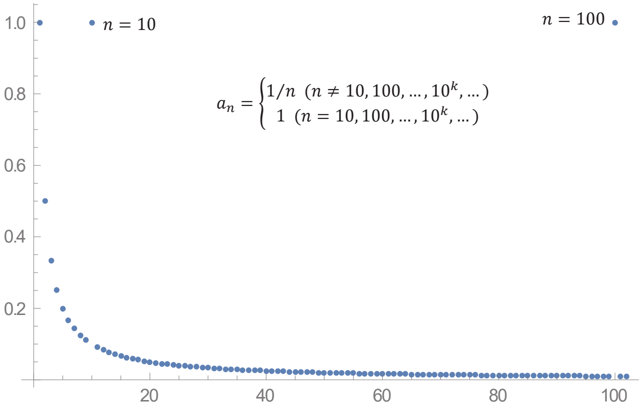
収束する，とは

収束の直感的な理解

- 数列$a_n = 1/n$を考える$(n \in \mathbb{N})$
- この数列はnを大きくするとどんどん0に近づく
  - 「nが増えると，a_nは0に限りなく近づく」
- これを数式で表現すれば

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

この数列は収束する？



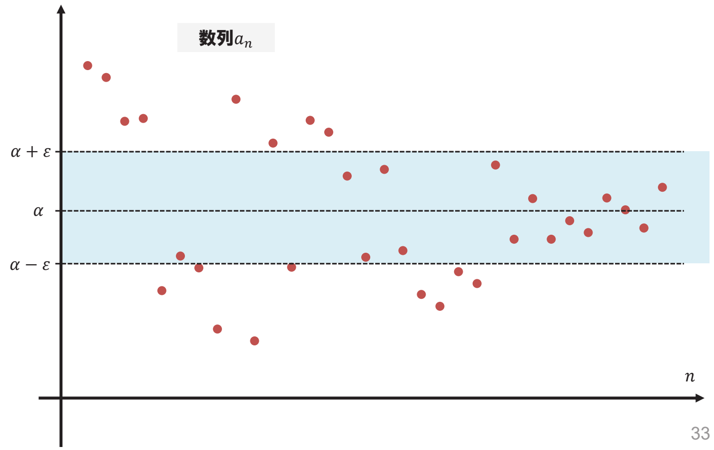
数列が収束する，とは

- $\varepsilon - \delta$論法(or $\varepsilon - N$)による定義
- 数列 a_n がαに収束する

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, |a_n - \alpha| < \varepsilon.$$

- 任意の(小さな)実数$\varepsilon > 0$に対して，
  ある自然数Nが存在して，
  それ以降の番号$n \geq N$に対して，
  $|a_n - \alpha| < \varepsilon$を満たす．

数列が収束する



収束することを証明する

- 命題1：$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$
- 証明の前に何を示すかを確認する
  - ゴールの確認をしておく
- 示すこと：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

- もう少し変形しておくと……

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

- ポイントは存在を示すところ

収束することを証明する

- 命題1：$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$
- 証明：次を示す．

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$とする．このとき，$N > \frac{1}{\varepsilon}$なる$N \in \mathbb{N}$を考えると，$n > N$に対して次が成立する．

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

よって，すべての$\varepsilon > 0$について，$\frac{1}{n} < \varepsilon$なる$N$が存在する．■

収束することを証明する

- 系1：Kが定数のとき，$\lim_{n \to \infty} \frac{K}{n} = 0$
- 証明：

大数の法則を示す

今日の目的

定理（大数の弱法則）

確率変数$X_1, X_2, \dots$が独立同分布で，
$E(X_i) = \mu$，　$V(X_i) = \sigma^2 < +\infty$を満たす．
このとき，次が成立する．

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \Pr(|\overline{X_n} - \mu| < \varepsilon) = 1.$$

ゴールは……

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \Pr(|\overline{X_n} - \mu| < \varepsilon) = 1.$$

- すべてのεに対して……
- nを限りなく大きくすれば，
- $|\overline{X_n} - \mu| < \varepsilon$となる確率が，
- 1に収束する．

ゴールからわかること

- 確率を評価する必要がある
  - $\Pr(|\overline{X_n} - \mu| < \varepsilon)$はいくつだろう？
  - 使える定理はないだろうか？
- 極限を扱う必要がある
  - どこまでバラす必要があるだろう？
  - $\varepsilon - N$論法までほぐす？

チェビシェフの不等式

- 確率変数Xが$E(X_i) = \mu$，　$V(X_i) = \sigma^2 < +\infty$を満たす．このとき，次が成立する．

$$\forall k > 0, \Pr(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$$

- なんか使えそう……
  - 確率の中身がなんか似ている
    - 変形すれば使えそう？
  - $\overline{X_n}$も確率変数だし……
    - 細かい確率論の話は適当なテキストを参照
      - 土井誠, 2004,『理工系の確率論』東海大学出版会.
      - 森真, 2012,『入門 確率解析とルベーグ積分』東京図書.

変形すると……

- 確率変数Xが$E(X) = \mu$，　$V(X) = \sigma^2 < +\infty$を満たす．このとき，次が成立する．

$$\forall k > 0, \Pr(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$$

$$\Leftrightarrow \forall k > 0, 1 - \Pr(|X - \mu| < k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

$$\Leftrightarrow \forall k > 0, \Pr(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

もう少し変形すると……

- 確率変数$\overline{X_n}$が$E(\overline{X_n}) = \mu$，　$V(\overline{X_n}) = \frac{\sigma^2}{n} < +\infty$を満たす．このとき，次が成立する．

$$\forall k > 0, \Pr\left(|\overline{X_n} - \mu| \geq \frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

$$\Leftrightarrow \forall k > 0, 1 - \Pr\left(|\overline{X_n} - \mu| < \frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

$$\Leftrightarrow \forall k > 0, \Pr\left(|\overline{X_n} - \mu| < \frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

もう少し変形すると……

- 確率変数$\overline{X_n}$が$E(\overline{X_n}) = \mu$，　$V(\overline{X_n}) = \frac{\sigma^2}{n} < +\infty$を満たす．このとき，次が成立する．

$$\forall k > 0, \Pr\left(|\overline{X_n} - \mu| < \frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

$\frac{k\sigma}{\sqrt{n}} = \varepsilon \Leftrightarrow k = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}$を代入すれば……

$$\Pr(|\overline{X_n} - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

系としてまとめておく

- 系2：確率変数$\overline{X_n}$が$E(\overline{X_n}) = \mu$，　$V(\overline{X_n}) = \frac{\sigma^2}{n} < +\infty$を満たす．このとき，次が成立する．

$$\forall \varepsilon > 0, \Pr(|\overline{X_n} - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

- 系1：Kが定数のとき，$\lim_{n\to\infty} \frac{K}{n} = 0$

いよいよ証明：その1

証明)系2より$\varepsilon > 0$について以下が成立する．

$$\Pr(|\overline{X_n} - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

また，$\Pr(|\overline{X_n} - \mu| < \varepsilon)$ は確率なので1以下である．つまり，以下が成立する．

$$1 \geq \Pr(|\overline{X_n} - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

系1より，$K = \sigma^2/\varepsilon^2$と置けば，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = 0.$$

いよいよ証明：その2

よって，不等式の最右辺の極限は1になる．すなわち，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}\right) = 1 - 0 = 1.$$

よって，以下が成立する．

$$1 \geq \lim_{n\to\infty} \Pr(|\overline{X_n} - \mu| < \varepsilon) \geq \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}\right) = 1.$$

ここから，はさみうちの原理から，

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(|\overline{X_n} - \mu| < \varepsilon) = 1.$$

$\blacksquare$

本当は，和の極限は極限の和とか，はさみうちの原理とか，証明しないといけないが……

証明の振り返り

- $\varepsilon - N$論法でも証明できる
  $\forall \varepsilon > 0, \forall \varepsilon' > 0, \exists N \in \mathbb{N},$
  $n > N, |\Pr(|\overline{X_n} - \mu| < \varepsilon) - 1| < \varepsilon'.$
- この場合でもチェビシェフの不等式(系2)を使うとよい
  - 系2を適用後，$N > \sigma^2/(\varepsilon^2\varepsilon')$なる自然数$N$を考えればよい．

数学を学ぶためには

数学を学ぶ方法

- 授業~~に潜る~~を受ける
- 自分で本を読む
- 自主ゼミを開催する
  - 輪講形式
  - 河東泰之「セミナーの準備のしかたについて」
    - https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/sem.htm
      - 「何も見ないでセミナーで発表できるようになるんです．」
    - 社会科学者には少し厳しい基準か
  - わからないところを気軽に他人に振れる
    - 数学科出身の人間を巻き込むとなおよい

数学の学習：共通する姿勢

- 手を動かす
  - 計算はきちんとフォローする
    - 読んで「わかった」気にならない
  - きちんとノートに書いておく
- 「自明」「明らか」は使わない
  - ぜんぜん明らかではない
    - 繰り返し：「わかった」気にならない
  - わかるまであれこれ悩む
    - 1週間悩むのはよくある話
- 素直に「わからない」と言う
  - その方が生産的 / 悩んでも仕方ないことも

今後の学習のために

- 数学セミナー編集部 編, 2005, 『数学ガイダンスhyper』日本評論社.
- 矢崎成俊, 2014, 『大学数学の教則――数学ライセンス取得のためのノート』東京図書.
- 佐藤文広, 2014, 『数学ビギナーズマニュアル 第2版』日本評論社.
- 酒井文雄, 2011, 『大学数学の基礎』共立出版.